INSTITUTUL DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Cu titlu de manuscris
CZU 517.925

NEAGU NATALIA

ALGEBRE LIE ŞI INVARIANŢI LA SISTEME DIFERENŢIALE CU PROIECŢII PE UNELE MODELE MATEMATICE

111.02 – ECUAŢII DIFERENŢIALE

Autoreferatul
tezei de doctor în ştiinţe matematice

CHIŞINĂU, 2018

Teza a fost elaborată la catedra Analiză Matematică şi Ecuaţii Diferenţiale a Universităţii de Stat din Tiraspol, Chişinău

Conducători ştiinţifici:

Popa Mihail, doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar

Cozma Dumitru, doctor habilitat în matematică, conferenţiar universitar

Referenţi oficiali:

1. Şubă Alexandru, doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar, Institutul de Matematică şi Informatică
2. Pricop Victor, doctor în ştiinţe matematice, conferenţiar universitar, Universitatea Pedagogică de Stat ”Ion Creangă”

Componenţa Consiliului ştiinţific specializat:

1. Cioban Mitrofan, dr. hab. în ştiinţe fizico-matematice, acad. AŞM, preşedinte
2. Orlov Victor, dr. în ştiinţe fizico-matematice, secretar ştiinţific
3. Vulpe Nicolae, dr. hab. în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar, membru corespondent al AŞM
4. Perjan Andrei, dr. hab. în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar
5. Bigun Iaroslav, dr. hab. în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar (Ucraina)

Susţinerea va avea loc la 22 iunie 2018, ora 15.00, în şedinţa Consiliului Ştiinţific Specializat D 01.111.02 - 05 din cadrul Institutului de Matematică şi Informatică (str. Academiei 5, sala 340, Chişinău, MD-2028, Republica Moldova).

Teza de doctor şi autoreferatul pot fi consultate la Biblioteca Ştiinţifică Centrală ”A. Lupan” a AŞM şi pe pagina web www.cnaa.md.

Autoreferatul a fost expediat la 21 mai 2018.

Secretar şt. al CŞS, dr. ____________ Orlov Victor

Conducători ştiinţifici: dr. hab., prof. univ. ____________ Popa Mihail

dr. hab., conf. univ. ____________ Cozma Dumitru

Autor ____________ Neagu Natalia

REPERELE CONCEPTUALE ALE CERCETĂRII

Teza de faţă ţine de teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale, algebrele Lie, teoria invarianţilor şi teoria stabilităţii mişcării descrise de sistemele diferenţiale.

Actualitatea temei. Teoria ecuaţiilor diferenţiale este un domeniu fundamental al matematicii. Necesitatea dezvoltării acestei teorii se explică prin faptul că majoritatea fenomenelor şi proceselor din lumea înconjurătoare se modelează cu ajutorul ecuaţiilor diferenţiale.

În lucrările clasice ale lui Sophus Lie (1842-1899) au fost puse bazele teoriei grupurilor şi algebrelor Lie, fără de care astăzi este de neimaginat matematica modernă, ba chiar şi fizica. Rezultatele acestei teorii au fost expuse în lucrările clasice ale lui S. Lie, G. Birkhoff, N.G. Cebotarev, L.P. Eeisenhart, L.S. Pontreaghin, N. Jacobson, L.V. Ovsyannikov, N.H. Ibragimov, P.J. Olver, W.I. Fushchich, N. Bourbaki ş.a. Problema principală, care a apărut în legătură cu această teorie, era construcţia grupurilor şi algebrelor Lie, ce sunt admise de ecuaţiile diferenţiale examinate şi integrabilitatea lor. Însă, Sophus Lie, chiar de la început a arătat că această teorie este puţin efectivă pentru ecuaţiile diferenţiale de ordinul întâi. Aceasta a făcut să fie fondată teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale de Henri Poincaré (1854-1912) şi Alexandr Lyapunov (1857-1918), ce ne permite să studiem comportamentul soluţiilor ecuaţiilor menţionate fără a le determina în mod explicit.

Bazele metodei teoriei invarianţilor algebrici pentru sistemele de ecuaţii diferenţiale polinomiale au fost puse de către C.S. Sibirschi (1928-1990) începând cu anii 60 ai secolului XX. În cercetările şcolii academicianului C.S. Sibirschi se utilizau grupurile de transformări centroafine, de rotaţie, ortogonale şi afine. Cu ajutorul invarianţilor se obţineau rezultate importante în teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale menţionate mai sus.

Metoda academicianului C.S. Sibirschi este dezvoltată şi în prezent în lucrările specialiştilor din Republica Moldova: N. Vulpe, M. Popa, A. Şubă, V. Baltag, Iu. Calin, D. Cozma ş.a. precum şi a specialiştilor din alte ţări: H. Zoladek (Polonia), M. Han (China), J. Llibre, J. Artés (Spania), D. Boularas (Franţa), L.A. Cherkas (Belarus), A.P. Sadovskii (Belarus), V. Romanovski (Slovenia), D.S. Shafer (SUA) ş.a.

Metoda invarianţilor algebrici a permis rezolvarea mai multor probleme din teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale, pentru unele clase de sisteme diferenţiale polinomiale, cum ar fi: problema deosebirii centrului şi a focarului, problema clasificării singularităţilor, problema integrabilităţii cu soluţii algebrice, problema clasificării topologice etc.

O nouă viziune asupra studiului sistemelor diferenţiale de ordinul întâi, a fost iniţiată în anii 2000 de prof. M. Popa împreună cu elevii săi (P. Macari, A. Braicov, S. Port, E. Staruş (Naidenova), E. Bâcova, N. Gherştega, O. Diaconescu, V. Orlov, V. Pricop).

A fost propusă cercetarea acestor sisteme diferenţiale prin atragerea la ele a teoriei algebrelor Lie, a operatorilor de reprezentare a grupurilor liniare în spaţiul variabilelor de fază şi al coeficienţilor sistemelor date, precum şi a algebrelor Sibirschi a invarianţilor şi comitanţilor sistemelor menţionate.

În lucrările [1] şi [2] au fost cercetate sistemele diferenţiale ternare cu neliniarităţi pătratice şi cubice. Problemele examinate ţineau îndeosebi de clasificarea dimensiunii orbitelor după modulul grupului centroafin, construcţia integralelor invariante ş.a.

Vom menţiona că până în prezent nu au fost întâlnite lucrări pentru sistemele diferenţiale ternare, ce ar trata problemele de stabilitate ale mişcării neperturbate cu ajutorul algebrelor Lie şi a invarianţilor algebrici. Probleme ce ţin de integrabilitatea sistemelor diferenţiale ternare polinomiale, de clasificarea punctelor singulare izolate, de determinarea anumitor suprafeţe algebrice, etc., au fost studiate pe parcursul ultimilor ani, în mai multe centre ştiinţifice: Slovenia (V. Romanovski), China (M. Han), Spania (J. Llibre, A. Mahdi, C.G. Pessoa), SUA (D.S. Shafer), Rusia (V.F. Edneral) şi altele.

Este cunoscut că până în prezent teoria calitativă a sistemelor diferenţiale ternare este slab dezvoltată, ceea ce face ca cercetările sistemelor diferenţiale multidimensionale să fie destul de actuale. Acest lucru este motivat şi de faptul că sistemele menţionate se întâlneasc destul de des în problemele practice din teoria oscilaţiilor neliniare, mecanica corpurilor solide, fizica atmosferei, siguranţa energetică, medicină şi alte domenii.

Scopul şi obiectivele lucrării. Scopul principal al lucrării constă în determinarea condiţiilor centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale bidimensionale şi ternare cu neliniarităţi polinomiale.

Realizarea acestui scop a fost însoţit de următoarele obiective:

– determinarea condiţiilor centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate pentru sistemele diferenţiale polinomiale plane în cazul necritic;

– determinarea condiţiilor centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate pentru sistemele diferenţiale bidimensionale critice cu neliniarităţi pătratice, neliniarităţi cubice şi neliniarităţi de gradul patru;

– determinarea condiţiilor centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate pentru sistemele diferenţiale ternare polinomiale în cazul necritic;

– determinarea condiţiilor centroafin-invariante de stabilitate a mişcării periodice neperturbate pentru sistemul diferenţial ternar cu neliniarităţi pătratice de tip Lyapunov-Darboux;

– determinarea tuturor integralelor generale pentru sistemul diferenţial ternar cu neliniarităţi pătratice de tip Darboux pe varietăţile descrise de o integrală particulară invariantă a acestui sistem;

– determinarea condiţiilor de stabilitate pentru unele clase de sisteme diferenţiale ternare generalizate de tip Lyapunov-Darboux cu neliniarităţi pătratice.

Metodologia cercetării ştiinţifice. În lucrare au fost aplicate metode ale teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale, metode ale algebrelor Lie şi a teoriei comitanţilor şi invarianţilor algebrici, metode ale teoriei stabilităţii mişcării neperturbate descrise de sisteme de ecuaţii diferenţiale, metode algebrice de calcul computaţional.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică. Până în prezent, stabilitatea mişcării neperturbate descrisă de sistemele diferenţiale a fost examinată folosind metodele clasice expuse, de exemplu, în [3–6]. În această lucrare cercetările ştiinţifice efectuate se bazează pe metodele din lucrările de mai sus, metode ale teoriei algebrelor Lie şi metode ale invarianţilor algebrici în studiul stabilităţii mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale polinomiale atât plane cât şi ternare.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în abordarea prin intermediul algebrelor Lie şi algebrelor invarianţilor a unor sisteme diferenţiale, ceea ce a contribuit la obţinerea condiţiilor centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale bidimensionale şi ternare cu neliniarităţi polinomiale, în vederea aplicării lor ulterioare la modele matematice concrete.

Semnificaţia teoretică. Rezultatele obţinute în teză sunt noi şi reprezintă un început de dezvoltare a unei noi abordări asupra utilizării algebrelor Lie şi teoriei invarianţilor algebrici în studiul stabilităţii mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale bidimensionale şi ternare cu neliniarităţi polinomiale, integrabilităţii sistemelor ternare pe unele varietăţi invariante.

Valoarea aplicativă a lucrării. Rezultatele tezei pot fi folosite: în dezvoltarea teoriei stabilităţii mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale multidimensionale cu neliniarităţi polinomiale cu ajutorul algebrelor Lie şi teoriei invarianţilor, în studiul unor modele matematice guvernate de sisteme de ecuaţii diferenţiale care descriu diverse procese din fizică, medicină, biologie, chimie ş.a., în calitate de suport pentru elaborarea cursurilor opţionale universitare şi post-universitare. Un lucru caracteristic rezultatelor din această lucrare este că specialiştii, care nu sunt iniţiaţi în teoria stabilităţii mişcării, pot folosi aceste rezulate având doar cunoştinţe elementare în acest domeniu.

Rezultatele ştiinţifice principale înaintate spre susţinere:

– condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate pentru sistemele diferenţiale plane şi ternare în cazul necritic;

– condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate pentru sistemele diferenţiale plane critice cu neliniarităţi pătratice, neliniarităţi cubice şi neliniarităţi de gradul patru;

– condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării periodice neperturbate pentru sistemul diferenţial ternar ce neliniarităţi pătratice de tip Lyapunov-Darboux;

– integralele generale pentru sistemul diferenţial ternar cu neliniarităţi pătratice de tip Darboux pe varietăţile descrise de o integrală particulară invariantă a acestui sistem;

– condiţiile de stabilitate a sistemelor diferenţiale ternare generalizate de tip Lyapunov-Darboux şi integralele polinomial-exponenţiale cu condiţii invariante pentru unele modele matematice descrise de ecuaţii diferenţiale ternare.

Implementarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele obţinute în teză pot fi aplicate:

– în investigaţiile ulterioare a stabilităţii mişcării neperturbate pentru sistemele diferenţiale plane cu neliniarităţi complete de până la gradele trei şi patru;

– în studiul unor modele matematice, ce descriu unele procese ce ţin de dinamica răspândirii tuberculozei în societate sau a unor procese SIV;

– drept suport pentru teze de masterat şi pot constitui conţinutul unor cursuri opţionale pentru studenţii şi masteranzii de la specialităţile matematice, fizice şi cu profil tehnic.

Aprobarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele principale ale lucrării au fost prezentate şi aprobate la diverse conferinţe şi seminare ştiinţifice: Third Conference of Mathematical Society of Moldova IMCS-50, August 19–23, 2014, Chişinău; The 23^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2015), September 17-20, 2015, Suceava; Conferinţa Ştiinţifică Internaţională a Doctoranzilor "Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători", ediţia a IV-a, 10 martie, 2015, Chişinău; International Conference "Mathematics and Information Tehnologies: Research and Education" (MITRE 2015), July 2-5, 2015, Chişinău; Conferinţa Ştiinţifică Internaţională a Doctoranzilor "Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători", ediţia a V-a, 25 mai, 2016, Chişinău; International Conference "Mathematics and Information Tehnologies: Research and Education" (MITRE 2016), June 24–26, 2016, Chişinău; The International Scientific Conference "Differential-Functional Equations and their Application", September 28-30, 2016, Chernivtsi, Ukraine; Conferinţa Ştiinţifică Internaţională a Doctoranzilor "Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători", ediţia a VI-a, 15 iunie, 2017, Chişinău; The 25^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2017), September 14-17, 2017, Iaşi; The Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova (dedicated to the centenary of V. Andrunachievici 1917-1997), June 28-July 2, 2017, Chişinău;

Seminarul "Ecuaţii Diferenţiale" din cadrul Facultăţii Matematică şi Mecanică, Universitatea de Stat din Belarus, Minsk, 2015; Seminarul ştiinţific "Ecuaţii Diferenţiale şi Algebre" din cadrul UST (2014-2017); Seminarul "Algebra şi Logica Matematică", 92 de ani de la naştere a profesorului V. Belousov, IMI, 2017; Seminarul de Ştiinţe Matematice "P. Osmătescu", UTM, 2017.

Publicaţii la tema tezei. Rezultatele principale ale tezei au fost publicate în 14 lucrări: 4 articole în reviste ştiinţifice din 3 ţari (Moldova, România, Ucraina) [8–11], 4 articole în culegeri ştiinţifice de lucrări ale conferinţelor internaţionale şi naţionale [12–15], 6 teze şi comunicări la manifestări ştiinţifice internaţionale [16–21]; 3 articole şi 1 teză sunt publicate fără coautori.

Cuvinte–cheie: sistem diferenţial polinomial, sistem diferenţial ternar de tip Darboux (Lyapunov-Darboux), stabilitatea mişcării neperturbate, algebră Lie, invariant, comitant.

Volumul şi structura tezei. Teza de doctor este scrisă în limba romàna şi constă din introducere, patru capitole, concluzii generale şi recomandări, bibliografie (73 titluri), 125 pagini de bază, adnotarea în limbile română, rusă şi engleză.

CONŢINUTUL TEZEI

În **Introducere** se descrie actualitatea şi importanţa problemei abordate, scopul şi obiectivele tezei, noutatea ştiinţifică a rezultatelor obţinute, importanţa teoretică şi valoarea aplicativă a lucrării, aprobarea rezultatelor şi sumarul compartimentelor.

În **Capitolul 1, Metode şi abordări practice la sistemele diferenţiale polinomiale**, sunt enunţate rezultatele clasice şi recente ce ţin de teoria calitativă, teoria algebrelor Lie, metoda invarianţilor algebrici a ecuaţiilor diferenţiale şi teoria stabilităţii mişcării neperturbate descrise de aceste ecuaţii. Se face o analiză comparativă a situaţiei existente în domeniu, ce formează problemele de cercetare şi direcţiile de soluţionare ale lor.

În **Capitolul 2, Condiţii invariante de stabilitate a mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale plane** ($[11, 12, 14, 16]$), au fost obţinute condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate pentru sistemele diferenţiale plane cu neliniarităţi polinomiale de orice grad în cazul necritic. În clasa sistemelor diferenţiale plane cu neliniarităţi de până la gradul patru inclusiv au fost determinate condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate în cazul critic.

Fie sistemul diferenţial bidimensional cu neliniarităţi polinomiale a mişcării perturbate

$$\dot{x}^j = a^j_\alpha x^\alpha + \sum_{i=1}^{l} a^j_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_i}} x^{\alpha_1}x^{\alpha_2}\ldots x^{\alpha_{m_i}} \quad (j, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m_i} = 1, 2; l < \infty), \tag{1}$$

unde tensorul $a^j_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_i}}$ este simetric după indicii de jos, după care aici se efectuează convoluţia totală, iar $\Gamma = \{m_1, m_2, \ldots, m_l\} (m_i \geq 2)$ este o mulţime finită de numere naturale diferite. Coeficienţii şi variabilele sistemului (1) iau valori din câmpul numerelor reale $\mathbb{R}$. Ecuaţiile de primă aproximaţie a sistemului (1) vor fi

$$\dot{x}^j = a^j_\alpha x^\alpha \ \ (j, \alpha = 1, 2). \tag{2}$$

Lema 2.1. *Ecuaţia caracteristică a sistemului* (2) *este* $\varrho^2 + L_{1,2}\varrho + L_{2,2} = 0$, *unde coeficienţii acestei ecuaţii sunt invarianţi centroafini [22] şi au forma*

$$L_{1,2} = -I_1, \quad L_{2,2} = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2), \tag{3}$$

iar

$$I_1 = a^\alpha_\alpha, \ \ I_2 = a^\alpha_\beta a^\beta_\alpha. \tag{4}$$

În Teoremele 2.1 şi 2.2 din teză sunt obţinute condiţiile de stabilitate a mişcării neperturbate în dependenţă de semnul coeficienţilor ecuaţiei caracteristice a sistemului (1).

Lema 2.3. *Dacă pentru sistemul* (2) *(sau* (1)*) se satisfac condiţiile invariante* $I_1^2 - I_2 = 0$, $I_1 < 0$, *unde* I_1 *şi* I_2 *sunt din* (4), *atunci sistemul* (2), *printr-o transformare centroafină poate fi adus la forma* $\dot{x}^1 = 0, \ \ \dot{x}^2 = a^2_\alpha x^\alpha$ $(\alpha = \overline{1, 2})$, *şi, prin urmare,* (1) *se va scrie*

$$\dot{x}^1 = \sum_{i=1}^{l} a^1_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_i}} x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} \ldots x^{\alpha_{m_i}}, \ \dot{x}^2 = a^2_\alpha x^\alpha + \sum_{i=1}^{l} a^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_i}} x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} \ldots x^{\alpha_{m_i}}$$
$$(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m_i} = \overline{1, 2}; \ l < \infty). \tag{5}$$

Vom examina sistemul diferenţial cu neliniarităţi pătratice

$$\dot{x}^j = a^j_\alpha x^\alpha + a^j_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \ \ (j, \alpha, \beta = 1, 2), \tag{6}$$

unde tensorul $a^j_{\alpha\beta}$ este simetric după indicii de jos după care aici se efectuează convoluţia totală. Cu ajutorul unor generatori I_j şi K_i ai algebrelor Sibirschi [22], introducem următoarele expresii ale invarianţilor şi comitanţilor sistemului (6):

$$\begin{gathered} E_1 = I_1^2 K_1 - I_1(K_3 + K_4) + K_8, \ E_2 = I_1^3(K_1^2 - K_7) + 2I_1^2(K_1K_4 - 2K_1K_3 - K_{13}) + \\ +2I_1(I_5K_2 + 2K_3^2 - K_4^2) + 4K_8(K_4 - K_3) + 2I_2K_{12}, \ E_3 = I_2K_1 - K_8 + I_1(K_4 - K_3), \\ E_4 = I_1(K_{11} - K_1K_2) + K_2(K_4 - K_3), \ E_5 = K_{11} - I_1K_5, \end{gathered} \tag{7}$$

unde

$$\begin{gathered} I_1 = a^\alpha_\alpha, \ \ I_2 = a^\alpha_\beta a^\beta_\alpha, \ \ I_5 = a^\alpha_p a^\beta_{\gamma q} a^\gamma_{\alpha\beta} \varepsilon^{pq}, \ \ K_1 = a^\alpha_{\alpha\beta} x^\beta, \ \ K_2 = a^p_\alpha x^\alpha x^q \varepsilon_{pq}, \\ K_3 = a^\alpha_\beta a^\beta_{\alpha\gamma} x^\gamma, \ \ K_4 = a^\alpha_\gamma a^\beta_{\alpha\beta} x^\gamma, \ \ K_5 = a^p_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta x^q \varepsilon_{pq}, \ \ K_7 = a^\alpha_{\beta\gamma} a^\beta_{\alpha\delta} x^\gamma x^\delta, \\ K_8 = a^\alpha_\gamma a^\beta_\delta a^\gamma_{\alpha\beta} x^\delta, \ \ K_{11} = a^p_\alpha a^\alpha_{\beta\gamma} x^\beta x^\gamma x^q \varepsilon_{pq}, \ \ K_{12} = a^\alpha_\beta a^\beta_{\alpha\gamma} a^\gamma_{\delta\mu} x^\delta x^\mu, \ K_{13} = a^\alpha_\gamma a^\beta_{\alpha\beta} a^\gamma_{\delta\mu} x^\delta x^\mu, \end{gathered}$$

iar ε^{pq} (ε_{pq}) este bivectorul unitate cu coordonatele $\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0, \ \ \varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1$ $(\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \ \ \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1)$.

Teorema 2.4. *Dacă pentru sistemul diferenţial a mişcării perturbate* (6) *se satisfac condiţiile invariante* $I_1^2 - I_2 = 0,\ I_1 < 0$, *atunci stabilitatea mişcării neperturbate descrisă de sistemul de mai sus, include toate cazurile posibile în următoarele şase:*

I. $E_1 \not\equiv 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

II. $E_1 \equiv 0,\ \ E_2 > 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

III. $E_1 \equiv 0,\ \ E_2 < 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

IV. $E_3 \equiv 0,\ \ E_4E_5 \not\equiv 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

V. $E_4 \equiv 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

VI. $E_5 \equiv 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă.*

În ultimile două cazuri mişcarea neperturbată aparţine unei serii continui de mişcări stabilizate (staţionare), la care aparţine şi mişcarea neperturbată examinată şi atunci toate mişcările acestei serii, destul de apropiate de cea neperturbată incluzând-o şi pe ultima, vor fi stabile. În acest caz, pentru perturbări destul de mici orice mişcare perturbată se va apropia asimptotic către una din mişcările stabilizate (staţionare) a seriei menţionate. În cazul III, mai mult ca atât, această mişcare neperturbată, este şi asimptotic stabilă.

Remarca 2.5. *Din Teorema 2.4 se obţin condiţiile pentru exemplul 2 a lui Lyapunov [3] (§32), cu* $a_1^1 = a_2^1 = 0,\ a_1^2 = k,\ a_2^2 = -1,\ a_{11}^1 = a,\ a_{12}^1 = \frac{1}{2}b,\ a_{22}^1 = c,\ a_{11}^2 = l,\ a_{12}^2 = \frac{1}{2}m,\ a_{22}^2 = n$ şi $x^1 = x,\ x^2 = y$. *Această teoremă, ne exprimă o generalizare invariantă a condiţiilor de stabilitate a mişcării neperturbate descrisă de sistemul general* (6), *ce conţine un caz particular, exemplul 2 din [3].*

În §2.5 se examinează sistemul diferenţial al mişcării perturbate cu neliniarităţi cubice

$$\begin{aligned} \dot{x} &= cx + dy + px^3 + 3qx^2y + 3rxy^2 + sy^3, \\ \dot{y} &= ex + fy + tx^3 + 3ux^2y + 3vxy^2 + wy^3, \end{aligned} \tag{8}$$

unde $c, d, e, f, p, q, r, s, t, u, v, w$ sunt coeficienţi reali arbitrari, având notaţiile $x^1 = x$, $a_1^1 = c, a_2^1 = d, a_{111}^1 = p, a_{112}^1 = q, a_{122}^1 = r, a_{222}^1 = s, x^2 = y, a_1^2 = e, a_2^2 = f, a_{111}^2 = t, a_{112}^2 = u, a_{122}^2 = v, a_{222}^2 = w$. Introducem următoarele notaţii:

$$\begin{gathered} F_1 = K_1(J_6 - J_1J_3) + J_1[J_1^2K_2 - J_1(Q_2 + Q_3) + Q_4], F_2 = J_6 - J_1J_3, F_5 = Q_1, \\ F_3 = K_1[J_3K_1 - J_1(J_1K_2 + 2Q_2 - Q_3) + Q_4] + J_1^2(J_1K_3 + Q_1), F_4 = J_1K_2 - Q_2, \end{gathered} \tag{9}$$

unde

$$\begin{gathered} J_1 \equiv I_1 = a_\alpha^\alpha,\ \ J_2 \equiv I_2 = a_\beta^\alpha a_\alpha^\beta,\ \ J_3 = a_\pi^\alpha a_{k\alpha\beta}^\beta \varepsilon^{\pi k},\ \ J_6 = a_\pi^\alpha a_\gamma^\beta a_{k\alpha\beta}^\gamma \varepsilon^{\pi k}, \\ K_1 = a_\beta^\alpha x^\beta x^\gamma \varepsilon_{\alpha\gamma},\ \ K_2 = a_{\alpha\beta\gamma}^\alpha x^\beta x^\gamma,\ \ K_3 = a_{\alpha\beta\gamma}^\pi x^\alpha x^\beta x^\gamma x^k \varepsilon_{\pi k}, \\ Q_1 = a_\alpha^\pi a_{\beta\gamma\delta}^k x^\alpha x^\beta x^\gamma x^\delta \varepsilon_{\pi k}, Q_2 = a_\beta^\alpha a_{\alpha\gamma\delta}^\beta x^\gamma x^\delta, Q_3 = a_\gamma^\alpha a_{\alpha\beta\delta}^\beta x^\gamma x^\delta, Q_4 = a_\gamma^\alpha a_\delta^\beta a_{\alpha\beta\eta}^\gamma x^\delta x^\eta. \end{gathered}$$

Teorema 2.5. *Dacă pentru sistemul diferenţial al mişcării perturbate* (8) *se satisfac condiţiile* $J_1^2 - J_2 = 0,\ J_1 < 0,$ *atunci stabilitatea mişcării neperturbate, descrisă de sistemul menţionat mai sus, include toate cazurile posibile în următoarele zece:*

I. $F_1 < 0,$ *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

II. $F_1 > 0,$ *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

III. $F_1 \equiv 0,\ F_2F_3 > 0,$ *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

IV. $F_1 \equiv 0,\ F_2F_3 < 0,$ *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

V. $F_1 \equiv 0,\ F_2 = 0,\ F_3 \not\equiv 0,\ F_4 < 0,$ *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

VI. $F_1 \equiv 0,\ F_2 = 0,\ F_3 \not\equiv 0,\ F_4 > 0,$ *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

VII. $F_1 \equiv 0,\ F_2 = 0,\ F_4 \equiv 0,\ F_3F_5 > 0,$ *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

VIII. $F_1 \equiv 0,\ F_2 = 0,\ F_4 \equiv 0,\ F_3F_5 < 0,$ *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

IX. $F_3 \equiv 0,$ *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

X. $F_5 \equiv 0,$ *atunci mişcarea neperturbată este stabilă.*

În ultimile două cazuri mişcarea neperturbată aparţine unei serii continui de mişcări stabilizate (staţionare), la care aparţine şi mişcarea neperturbată examinată şi atunci toate mişcările acestei serii, destul de apropiate de cea neperturbată incluzând-o şi pe ultima, vor fi stabile. În acest caz, pentru perturbări destul de mici orice mişcare perturbată se va apropia asimptotic către una din mişcările stabilizate (staţionare) a seriei menţionate. Mai mult ca atât, în cazurile $II, IV, VI, VIII$ *această mişcare neperturbată este şi asimptotic stabilă.*

În §2.6 se examinează sistemul diferenţial al mişcării perturbate de forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= cx + dy + gx^4 + 4hx^3y + 6kx^2y^2 + 4lxy^3 + my^4, \\ \dot{y} &= ex + fy + nx^4 + 4px^3y + 6qx^2y^2 + 4rxy^3 + sy^4, \end{aligned} \tag{10}$$

unde $c, d, e, f, g, h, k, l, m, n, p, q, r, s$ sunt coeficienţi reali arbitrari.

În [23] este arătat, dacă φ şi ψ sunt comitanţi omogeni de gradul ρ_1 şi ρ_2, respectiv de la variabilele de fază x şi y a unui sistem diferenţial bidimensional polinomial, atunci transvectantul

$$(\varphi, \psi)^{(j)} = \frac{(\rho_1 - j)(\rho_2 - j)}{\rho_1!\rho_2!} \sum_{i=0}^{j} (-1)^j \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} \frac{\partial^j \varphi}{\partial x^{j-i} \partial y^i} \frac{\partial^j \psi}{\partial x^i \partial y^{j-i}} \tag{11}$$

tot este un comitant al acestui sistem. În lucrările lui Iu. Calin, vezi de exemplu [23], se arată cu ajutorul transvectantului (11), pentru sistemul dat, pot fi construiţi toţi generatorii algebrelor Sibirschi a comitanţilor şi invarianţilor oricărui sistem de tipul (1).

Notăm omogenităţile din membrii drepţi ai sistemului (10) în felul următor:

$$P_1(x,y) = cx + dy, \quad P_4(x,y) = gx^4 + 4hx^3y + 6kx^2y^2 + 4lxy^3 + my^4,$$
$$Q_1(x,y) = ex + fy, \quad Q_4(x,y) = nx^4 + 4px^3y + 6qx^2y^2 + 4rxy^3 + sy^4. \tag{12}$$

În conformitate cu [24], scriem următorii comitanţi ai sistemului (10)

$$R_i = P_i(x,y)y - Q_i(x,y)x, \quad S_i = \frac{1}{i}(\frac{\partial P_i(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Q_i(x,y)}{\partial y}), \quad (i = 1, 4). \tag{13}$$

În continuare vom avea nevoie de următorii comitanţi şi invarianţi din [24], ai sistemului (10), construiţi cu ajutorul operaţiilor (11) şi (13):

$$I_1 = S_1, \quad I_2 = (R_1, R_1)^{(2)}, \quad K_1 = R_4, \quad K_2 = S_4, \quad Q_1 = R_1, \quad Q_2 = S_1,$$
$$Q_3 = (R_4, R_1)^{(2)}, \quad Q_4 = (R_4, R_1)^{(1)}, \quad Q_5 = (S_4, S_1)^{(2)}, \quad Q_6 = (S_4, R_1)^{(1)},$$
$$Q_{19} = [\![R_4, R_1)^{(2)}, R_1)^{(2)}, \quad Q_{20} = [\![R_4, R_1)^{(2)}, R_1)^{(1)}, \tag{14}$$
$$Q_{21} = [\![S_4, R_1)^{(2)}, R_1)^{(1)}, \quad Q_{43} = [\![R_4, R_1)^{(2)}, R_1)^{(2)}, R_1)^{(1)},$$

unde semnul "$[\![$" înlocuieşte toate parantezele rotunde ale transvectanţilor, ce sunt necesare să fie scrise în stânga. Considerăm următoarele expresii, formate din comitanţii şi invarianţii din (14) pentru sistemul (10), ce se vor scrie sub următoarea formă, cu notaţiile:

$$H_1 = Q_1[Q_2(15Q_{19} - 8Q_{21}) - 10Q_{43} + 12I_1^2Q_5] + Q_2^2[Q_2(4K_2Q_2 + 5Q_3 - 8Q_6) - 10Q_{20}],$$
$$H_2 = 5Q_2^3(K_1Q_2 - 2Q_4) + 2Q_1^2(5Q_{19} + 4Q_{21} - 6Q_2Q_5) - 4Q_1Q_2[Q_2(K_2Q_2 - 5Q_3 -$$
$$-2Q_6) + 5Q_{20}], H_3 = Q_2(5Q_{19} - 6Q_{21} + 3Q_2Q_5) - 10Q_{43}, H_4 = 5I_1Q_5 + 10Q_{19} - 2Q_{21}, \tag{15}$$
$$H_5 = Q_1, \quad H_6 = 5I_1K_2 + 10Q_3 - 6Q_6, \quad H_7 = 8K_2Q_1 - 5K_1Q_2 - 10Q_4.$$

Teorema 2.6. *Dacă pentru sistemul diferenţial al mişcărilor perturbate* (10)*, se satisfac condiţiile* $I_1^2 - I_2 = 0, I_1 < 0$*, unde* I_1 *şi* I_2 *sunt din* (4)*, atunci stabilitatea mişcării neperturbate a sistemului menţionat mai sus, include toate cazurile posibile în următoatele nouă:*

I. $H_1 \not\equiv 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

II. $H_1 \equiv 0$, $H_2H_3 > 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

III. $H_1 \equiv 0$, $H_2H_3 < 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

IV. $H_1 \equiv H_3 \equiv 0$, $H_2H_4 \not\equiv 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

V. $H_1 \equiv H_3 \equiv H_4 \equiv 0$, $H_2H_5H_6 > 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

VI. $H_1 \equiv H_3 \equiv H_4 \equiv 0$, $H_2H_5H_6 < 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

VII. $H_1 \equiv H_3 \equiv H_4 \equiv H_6 \equiv 0, H_2H_7 \not\equiv 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

VIII. $H_2 \equiv 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

IX. $H_7 \equiv 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă.*

În ultimile două cazuri, mişcarea neperturbată aparţine unei serii continui de mişcări stabilizate (staţionare), la care aparţine şi mişcarea neperturbată examinată şi atunci toate mişcările acestei serii, destul de apropiate de cea neperturbată incluzând-o şi pe ultima, vor fi stabile. În acest caz, pentru perturbări destul de mici orice mişcare perturbată se va apropia asimptotic către una din mişcările stabilizate (staţionare) a seriei menţionate. Mai mult ca atât, în cazurile III şi VI această mişcare neperturbată este şi asimptotic stabilă [6].

În **Capitolul 3, Invarianţi şi comitanţi în determinarea stabilităţii mişcării neperturbate şi a integrabilităţii sistemelor diferenţiale ternare** ([9, 10, 17, 20]), au fost determinate condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate pentru sistemele diferenţiale ternare cu neliniarităţi polinomiale în cazul necritic. Au fost obţinute condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate pentru sistemul diferenţial ternar cu neliniarităţi pătratice de tip Darboux în cazul critic, când ecuaţia caracteristică a părţii liniare a sistemului dat posedă o rădăcină nulă sau două rădăcini pur imaginare. Au fost construite algebrele Lie pentru sistemele diferenţiale ternare de tip Darboux cu neliniarităţi pătratice şi integralele generale pentru toate sistemele de acest tip, ce se află pe varietăţile invariante determinate de o integrală particulară a sistemului general de tip Darboux cu neliniarităţi pătratice.

Fie sistemul diferenţial ternar cu neliniarităţi polinomiale a mişcării neperturbate (vezi, de exemplu, [1] sau [2]) de forma

$$\dot{x}^j = a^j_\alpha x^\alpha + \sum_{i=1}^{l} a^j_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_i}} x^{\alpha_1}x^{\alpha_2}\ldots x^{\alpha_{m_i}} (j, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m_i} = \overline{1,3}; l < \infty), \qquad (16)$$

unde tensorul $a^j_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_i}}$ este simetric după indicii de jos, după care aici se efectuează convoluţia totală. Un rol important în studiul sistemelor ternare (16) îl joacă comitantul

$$\sigma_1 = a^\alpha_\mu a^\beta_\delta a^\gamma_\alpha x^\delta x^\mu x^\nu \varepsilon_{\beta\gamma\nu} \;\; (\beta, \gamma, \nu = \overline{1,3})) \qquad (17)$$

din [1], ce este o integrală particulară a sistemului

$$\dot{x}^j = a^j_\alpha x^\alpha \quad (j, \alpha = \overline{1,3}) \qquad (18)$$

de primă aproximaţie ([3], [4]) pentru sistemul (16).

Ecuaţia caracteristică, a sistemului (18), se va scrie

$$\varrho^3 + L_{1,3}\varrho^2 + L_{2,3}\varrho + L_{3,3} = 0,$$

unde coeficienţii acestei ecuaţii sunt invarianţi centroafini şi au forma

$$L_{1,3} = -\theta_1, \;\; L_{2,3} = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1^2), \;\; L_{3,3} = -\frac{1}{6}(\theta_1^3 - 3\theta_1\theta_2 + 2\theta_3), \qquad (19)$$

iar expresiile lor conţin

$$\theta_1 = a^\alpha_\alpha, \ \ \theta_2 = a^\alpha_\beta a^\beta_\alpha, \ \ \theta_3 = a^\alpha_\gamma a^\beta_\alpha a^\gamma_\beta. \tag{20}$$

În Teoremele 3.1 şi 3.2 din teză sunt obţinute condiţiile de stabilitate a mişcării neperturbate în dependenţă de semnul expresiilor de la coeficienţii ecuaţiei caracteristice a sistemului (16).

În §3.4 – §3.6 se determină condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate pentru sistemul diferenţial ternar cu neliniarităţi pătratice, de forma

$$\dot{x}^j = a^j_\alpha x^\alpha + a^j_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \quad (j, \alpha, \beta = \overline{1,3}), \tag{21}$$

unde tensorul $a^j_{\alpha\beta}$ este simetric după indicii de jos, după care aici se efectuează convoluţia totală.

În continuare vom avea nevoie de comitanţii sistemului (21)

$$p_1 = a^\alpha_{\alpha\beta} x^\beta, p_8 = a^\alpha_\beta a^\beta_{\alpha\gamma} x^\gamma, p_9 = a^\alpha_\gamma a^\beta_{\beta\alpha} x^\gamma, p_{10} = a^\alpha_\gamma a^\beta_\alpha a^\gamma_{\beta\delta} x^\delta,$$

unde $p_1, p_8 - p_{10}$ sunt din [1]. Calculând aceşti comitanţi şi invarianţii θ_1 şi θ_2 din (20), pentru sistemul (21) obţinem

$$3\theta_2 p_1 - 4\theta_1 p_8 + 3\theta_1 p_9 - 8p_{10} = -8[g(nq - mr) + h(rs - np) + k(mp - qs)]x. \tag{22}$$

Teorema 3.6. *Dacă pentru sistemul* (21) *a mişcării neperturbate se satisfac condiţiile invariante* $L_{1,3} > 0, \ L_{2,3} > 0, \ L_{3,3} = 0,$ *unde* $L_{i,3}$ $(i = \overline{1,3})$ *sunt din* (19), *şi*

$$\eta = a^\alpha_{\beta\gamma} x^\beta x^\gamma x^\delta y^\mu \varepsilon_{\alpha\delta\mu} \equiv 0, \tag{23}$$

atunci stabilitatea mişcării neperturbate descrisă de acest sistem, include toate cazurile posibile în următoarele două:

I. $3\theta_2 p_1 - 4\theta_1 p_8 + 3\theta_1 p_9 - 8p_{10} \not\equiv 0,$ *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

II. $3\theta_2 p_1 - 4\theta_1 p_8 + 3\theta_1 p_9 - 8p_{10} \equiv 0,$ *atunci mişcarea neperturbată este stabilă.*

În ultimul caz, există o serie continuă de mişcări stabilizate (staţionare), la care aparţine şi mişcarea neperturbată examinată şi atunci toate mişcările acestei serii, destul de apropiate de cea neperturbată incluzând-o şi pe ultima, vor fi stabile. În acest caz, pentru perturbări destul de mici orice mişcare perturbată se va apropia asimptotic către una din mişcările stabilizate (staţionare) a seriei menţionate.

Lema 3.10. *Sistemul* (21) *poate fi adus, printr-o transformare centroafină, la forma Lyapunov-Darboux*

$$\begin{gathered}\dot{x}^1 = -\lambda x^2 + 2x^1(a^1_{11}x^1 + a^1_{12}x^2 + a^1_{13}x^3), \ \dot{x}^2 = \lambda x^1 + 2x^2(a^1_{11}x^1 + a^1_{12}x^2 + a^1_{13}x^3), \\ \dot{x}^3 = x^2 - L_{1,3}x^3 + 2x^3(a^1_{11}x^1 + a^1_{12}x^2 + a^1_{13}x^3),\end{gathered} \tag{24}$$

dacă şi numai dacă au loc condiţiile centroafin-invariante $\sigma_1 \not\equiv 0,\ \eta \equiv 0,\ L_{1,3}L_{2,3} = L_{3,3}$, *unde* $\lambda^2 = L_{2,3}\ (L_{2,3} > 0)$, *iar* σ_1 *din* (17), $L_{i,3}\ (i = \overline{1,3})$ *din* (19) *şi* η *din* (23).

Sistemului (24) admite o algebră Lie tridimensională comutativă. Cu ajutorul acestei algebre obţinem

Teorema 3.8. *Pentru sistemul* (24) *una din integralele prime are forma*

$$F_1 \equiv \frac{f_1}{f_2^2} = C_1,$$

unde

$$f_1 = (x^1)^2 + (x^2)^2,\ \ f_2 = -\lambda L_{1,3} + 2(k + hL_{1,3})x^1 - 2gL_{1,3}x^2 + 2\lambda k x^3.$$

La fel, cu ajutorul algebrei Lie admise de sistemul (24) pentru $L_{1,3} = 0$, avem

Teorema 3.10. *Sistemul* (24) *pentru* $L_{1,3} = 0$ *posedă integrala generală compusă din următoarele două integrale prime:*

$$F_1 \equiv \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2}{(x^1 + \lambda x^3)^2} = C_1, F_2 \equiv \frac{\lambda^2 + 2kx^1 + 2(\lambda g - k)x^2 + 2\lambda(k + \lambda h)x^3}{x^1 + \lambda x^3} + 2k\, arctg \frac{x^2}{x^1} = C_2.$$

În Teoremele 3.11-3.21 din teză au fost obţinute integralele generale a sistemului ternar de tip Darboux

$$\dot{x}^j = a^j_\alpha x^\alpha + 2x^j(gx^1 + hx^2 + kx^3)\ \ (j = \overline{1,3}). \tag{25}$$

pentru toate cele 11 cazuri determinate de condiţiile invariante $\sigma_1 \equiv 0$ din (17) (lema 9.1 din [1]) şi $\varkappa_2 q_1 \not\equiv 0$, unde $q_1 = a^\alpha_{\beta\gamma}x^\beta x^\gamma u_\alpha,\ \varkappa_2 = a^\alpha_\beta x^\beta u_\alpha$ din [1]. Vom menţiona că σ_1 este o integrală particulară a sistemului (25). Pentru ilustrare vom aduce integrala generală doar în cazul (xi) din teză.

Teorema 3.21, (xi). *Dacă coeficienţii părţii liniare a sistemului ternar de tip Darboux* (25) *satisfac condiţiilor* $a^2_1 = a^3_1 = 0; a^3_2 \neq 0; a^1_3 = \frac{a^1_2(a^3_3 - a^1_1)}{a^3_2}; a^2_3 = \frac{(a^1_1 - a^2_2)(a^1_1 - a^3_3)}{a^3_2}$ *cu* $\varkappa_2 q_1 \not\equiv 0$, *atunci integrala generală a acestui sistem cu notaţiile* $x = x^1, y = x^2, z = x^3$ *constă din următoarele două integrale prime:*

$$F_1 \equiv (a^3_2 x - a^1_2 z)[a^3_2 y + (a^1_1 - a^2_2)z]^{-1} = C_1,$$

$$F_2 \equiv (a^3_2 x - a^1_2 z)^{a^1_1 - a^2_2 - a^3_3}[a^3_2 y - (a^1_1 - a^3_3)z]^{a^1_1}\Phi^{-2a^1_1 + a^2_2 + a^3_3} = C_2,$$

unde

$$\Phi = a^3_2(a^1_1 - a^2_2 - a^3_3)(a^1_1 + 2gx) + 2a^3_2(a^1_2 g - a^3_3 h + a^3_2 k)y + 2[-a^1_2(a^1_1 - a^3_3)g + a^1_1(a^1_1 - a^2_2 - a^3_3)h +$$

$$+ a^2_2(a^3_3 h - a^3_2 k)]z.$$

În toate cele 11 cazuri au fost construite algebrele Lie admise de sistemul diferenţial ternar de tip Darboux (25) cu ajutorul cărora au fost construite integralele prime.

În **Capitolul 4, Probleme de integrabilitate şi stabilitate pentru sistemul ternar generalizat de tip Lyapunov–Darboux** ([8, 13, 18, 19, 21]), au fost obţinute condiţiile centroafin-invariante, când un sistem cu neliniarităţi pătratice posedă în părţile pătratice un factor comun. Aşa sisteme au fost numite sisteme diferenţiale generalizate de tip Darboux. Au fost examinate unele cazuri de stabilitate a mişcării neperturbate pentru aceste sisteme, când partea liniară posedă forma Lyapunov şi sunt aproape de unele modele matematice din medicină. Au fost construite integralele prime polinomial-exponenţiale cu condiţii invariante pentru unele modele matematice descrise de sisteme diferenţiale ternare.

Fie sistemul diferenţial cu neliniarităţi pătratice de forma

$$\dot{x}^j = a^j_\alpha x^\alpha + a^j_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \quad (j, \alpha, \beta = \overline{1,3}), \tag{26}$$

unde tensorul $a^j_{\alpha\beta}$ este simetric după indicii de jos, după care aici se efectuează convoluţia totală. Coeficienţii şi variabilele acestui sistem iau valori din câmpul numerelor reale $\mathbb{R}$.

În baza formulei lui Hermit [26], despre rezultantul a trei forme pătratice ternare

$$R = SF - 16Sf, \tag{27}$$

obţinem rezultantul R a părţilor pătratice din membrii drepţi ai sistemului (26), unde

$$f = \frac{1}{6}p_5, \quad F = \frac{1}{6}[3(r_3 - r_5 + r_6) - r_2], \tag{28}$$

şi S este din [27], iar comitantul p_5 şi contravarianţii r_2, r_3, r_5, r_6 sunt din [1].

Teorema 4.1. *Pentru ca părţile pătratice din membrii drepţi ai sistemului* (26) *să conţină un factor liniar comun este necesar şi suficient ca rezultantul* R *din* (27)*, să fie nul.*

Presupunem că părţile pătratice din membrii drepţi ai sistemului (26) au forma

$$P_2 = a^1_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta,\ Q_2 = a^2_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta,\ R_2 = a^3_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \ \ (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \tag{29}$$

şi se descompun într-un produs de doi factori liniari, dintre care unul este comun.

Teorema 4.2. *Fie* $fF \not\equiv 0$ *pentru* f *şi* F *din* (28)*. Atunci pentru ca în părţile pătratice* (29) *a membrilor drepţi ai sistemului* (26) *să existe un factor comun cu coeficienţi reali este necesar şi suficient să se satisfacă următoarele condiţii invariante (în raport cu grupul centroafin* $GL(3, \mathbb{R})$*):*

$$r_2\Big|_{\substack{u_2=0\\u_3=0}} = r_2\Big|_{\substack{u_1=0\\u_3=0}} = r_2\Big|_{\substack{u_1=0\\u_2=0}} = 0, \qquad R = Rez(P_2, Q_2, R_2) = 0, \tag{30}$$

unde $r_2 = D_1(u_1)^3 + D_2(u_2)^3 + D_3(u_3)^3 + \cdots$ *este din [1], iar* R *din* (27) *cu* P_2, Q_2 *şi* R_2 *din* (29).

Corolarul 4.1. *În condiţiile Teoremei 4.2, sistemul* (26) *printr-o transformare centroafină, poate fi adus la una din formele*

$$\dot{x}^1 = a^1_\alpha x^\alpha + x^1(q_1x^1 + q_2x^2 + q_3x^3),\ \dot{x}^2 = a^2_\alpha x^\alpha + x^1(s_1x^1 + s_2x^2 + s_3x^3),$$
$$\dot{x}^3 = a^3_\alpha x^\alpha + x^1(n_1x^1 + n_2x^2 + n_3x^3). \tag{31}$$

Sistemul (31) admite o algebră Lie L_7, care nu este rezolubilă.

În §4.3 se determină integralele polinomial-exponenţiale de gradul nu mai mare ca doi pentru forma canonică a sistemului generalizat ternar de tip Lyapunov-Darboux, ce corespunde sistemului ternar (26), când $\sigma_1 \not\equiv 0$ din (17), de forma

$$\dot{x} = -\lambda y + x(g_1x + 2h_1y + 2k_1z),\ \dot{y} = \lambda x + x(g_2x + 2h_2y + 2k_2z),$$
$$\dot{z} = y + nz + x(g_3x + 2h_3y + 2k_3z), \tag{32}$$

unde $\lambda^2 = L_{2,3} > 0,\ n \equiv -L_{1,3} \neq 0$, iar $L_{2,3}$ şi $L_{1,3}$ sunt din (19). Menţionăm că acest sistem, în unele condiţii, are ca proiecţii sistemul de tip Darboux [1], sistemul Lorentz [28], sistemul dinamicii răspândirii tuberculozei [29, 30] şi sistemul SIV [31].

S-a examinat integrala primă polinomial-exponenţială a sistemului (32) de forma $F = F_2(x, y, z)e^{\mu t}$, unde $F_2(x, y, z) \equiv a + b_1x + b_2y + b_3z + c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2 + 2c_4xy + 2c_5xz + 2c_6yz$, iar $v = (-\lambda, \lambda, 1, n, g_1, h_1, k_1, g_2, h_2, k_2, g_3, h_3, k_3)$ – vectorul acestui sistemu.

În Teorema 4.3 au fost obţinute integralele prime polinomial-exponenţiale de grad nu mai mare ca doi, pentru sistemul (32). Pentru ilustrare, vom aduce doar setul (vii) din teză.

Teorema 4.3, (vii). *Integrala primă polinomial-exponenţială de grad nu mai mare ca doi a sistemului Lyaponuv-Darboux* (32), *dată de vectorul* $v = (-\lambda, \lambda, 1, n, -2h_2, \frac{2}{n}h_2\lambda, 0, g_2, h_2, 0, -\frac{n}{(n^2+\lambda^2)(2h_2(n^2+2\lambda^2)+g_2n\lambda)}(g_2h_2n^2 + g_2^2n\lambda + (4h_2h_3\lambda - g_2h_3n)(n^2+\lambda^2)), h_3, 0)$, *are forma* $F = \frac{1}{n\lambda(2h_2(n^2+2\lambda^2)+g_2n\lambda)}((g_2h_2nx^2 - 4h_2^2y^2\lambda + 4h_2^2nxy + 2h_2n^2y + 2h_2nx\lambda)(n^2+2\lambda^2) +$
$+ (g_2h_3n^2x^2 - 4h_2h_3ny^2\lambda + g_2n^2z\lambda + 4h_2h_3n^2xy)(n^2+\lambda^2) + 2h_2n^5z + g_2n^2\lambda(ny + x\lambda) +$
$+ 2h_2nz\lambda^2(3n^2 + 2\lambda^2))e^{-nt}$.

În §4.4 se examinează sistemul dinamicii raspândirii epidemiei tuberculozei ([29], [32])

$$\dot{S} = \tau - \mu S - \beta ST,\ \dot{L} = -\delta L - \mu L + (1-p)\beta ST,\ \dot{T} = \delta L - (\mu+\nu)T + p\beta ST, \tag{33}$$

care, conform Teoremei 4.4, admite o algebră Lie bidimensională necomutativă de operatori. Pentru acest sistem s-au determinat integralele prime polinomial-exponenţiale de forma $I_q(S, L, T, t) = P_q(S, L, T)e^{\lambda t}$ $(q \leq 3)$, unde $P_q(S, L, T) = a + bS + cL + dT + eS^2 + fL^2 + gT^2 + 2hSL + 2kST + 2lLT + mS^3 + 3nS^2L + 3oS^2T + 3qSL^2 + 3rSLT + 3sST^2 + uL^3 + 3vL^2T + 3wLT^2 + zT^3$, prezentate în următorul tabel:

Tabelul 4.4-4.5. Integralele prime ale sistemului (33) când $q \leq 3$

$(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{p})$	**Integralele prime**
$(\tau, \beta, \mu, p\nu, \nu, p)$	$I_1^{(1)} = (L + \frac{p-1}{p} T)e^{t(\mu+\nu)}$
$(\tau, \beta, \mu, \delta, \nu, 1)$	$I_1^{(2)} = Le^{t(\delta+\mu)}$
$(\tau, \beta, \mu, -\mu, \nu, 1)$	$I_2^{(1)} = a + L(c + fL)$
$(\tau, \beta, \mu, -p\mu, -\mu, p)$	$I_2^{(2)} = a + (L + \frac{p-1}{p} T)(c + f(L + \frac{p-1}{p} T))$
$(\tau, \frac{\mu(\nu^2-\mu^2)}{\nu\tau}, \mu, -\nu, \nu, 0)$	$I_2^{(3)} = ((\nu^2-\mu^2)((L+S)^2+2T(L+S))/(2\mu\tau)+ (L + S + T)+$ $+T\nu/\mu - S\nu^2/\mu^2 - \tau/(2\mu) + \nu^2\tau/(2\mu^3))e^{2t\mu}$
$(\tau, \beta, \mu, -\mu, \nu, 1)$	$I_3^{(1)} = L(c + fL + L^2u)$
$(\tau, \beta, \mu, \delta, \nu, 1)$	$I_3^{(2)} = \frac{1}{p^3}(ap^3 + cp^2(Lp - T + pT) + f(Lp - T + pT)^2+$ $+u(Lp - T + pT)^3.$

În §4.5 se studiază sistemul diferenţial ternar critic cu neliniarităţi pătratice de forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2a_4xy + 2a_5xz + 2a_6yz, \\ \dot{y} &= px + qy + rz + b_1x^2 + b_2y^2 + b_3z^2 + 2b_4xy + 2b_5xz + 2b_6yz, \\ \dot{z} &= sx + my + nz + c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2 + 2c_4xy + 2c_5xz + 2c_6yz, \end{aligned} \tag{34}$$

unde $p, q, r, s, m, n, a_i, b_i, c_i$ $(i = \overline{1, 6})$ sunt coeficienţi reali arbitrari. În Lema 4.2 s-au obţinut expresiile care determină stabilitatea mişcării neperturbate a sistemului (34). S-au examinat câteva cazuri de sisteme ternare de forma canonică critică Lyapunov (34):
Exemplul 4.1. (Sistemul dinamicii răspândirii tuberculozei) Fie sistemul dinamicii răspândirii tuberculozei (33), care prin transformările afine $x = \tau - \mu S$, $y = L$, $z = T$ $(\mu \neq 0)$ şi centroafine $\bar{x} = -ey + cz, \bar{y} = y, \bar{z} = x + z$ $(c \neq 0)$, se aduce la forma critică de tip Lyapunov

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{2(ck - eh)}{c^2}(-x^2 - 2exy + cxz - e^2y^2 + ceyz); \\ \dot{y} &= \frac{d}{c}x + (c + \frac{de}{c})y + \frac{2h}{c^2}(-x^2 - 2exy + cxz - e^2y^2 + ceyz); \\ \dot{z} &= \frac{-a + f + b}{c}x + \frac{(-a + c + f + b)e}{c}y + az + \frac{2(g + k)}{c^2}(-x^2 - 2exy + cxz - e^2y^2 + ceyz), \end{aligned} \tag{35}$$

cu $-a - c - f > 0, a(c + f) > 0$ conform teoremei lui Hurwitz, iar $a = -\mu \neq 0, b = \beta\tau$, $c = -\delta - \mu, d = \frac{(1-p)\beta\tau}{\mu}, e = \delta, f = \frac{p\beta\tau}{\mu} - \mu - \mu_T, g = -\frac{\beta}{2}, h = -\frac{(1-p)\beta}{2\mu}, k = -\frac{p\beta}{2\mu}$, şi $cf - de = 0$.
Remarca 4.3. *Dacă* $a+c+f < 0$ *şi* $a(c+f) > 0$, *atunci stabilitatea mişcării neperturbate guvernată de sistemul* (35) *include toate cazurile posibile în următoarele două:*

I. $(-1+cB_1-eA_1)(1+eA_1)(-eh+ck) \neq 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

II. $(-1+cB_1-eA_1)(1+eA_1)(-eh+ck) = 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă.*

Următoarele exemple de sisteme ternare critice de tip Lyapunov (34), cu 6 parametri, generalizează Exemplul 1 din [3] (§32), care în ecuaţia critică are 2 parametri.

Exemplul 4.3. Fie sistemul diferenţial ternar, cu 6 parametri în ecuaţia critică

$$\begin{gathered}\dot{x} = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2a_4xy + 2a_5xz + 2a_6yz,\\ \dot{y} = x - y + (x - y + 2z)(-x + y + z),\ \ \dot{z} = x - z + (x + 2y - z)(-x + y + z),\end{gathered} \tag{36}$$

unde a_i $(i = \overline{1, 6})$ sunt coeficienţi reali arbitrari.

Remarca 4.5. *Stabilitatea mişcării neperturbate guvernată de sistemul* (36) *include toate cazurile posibile în următoarele cinci:*

I. $L_1 \neq L_2$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

II. $L_1 = L_2,\ L_3 < 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

III. $L_1 = L_2,\ L_3 > 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

IV. $L_1 = L_2,\ L_3 = 0,\ L_4 \neq 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

V. $a_2 + a_3 + 2a_6 = a_1 = 0,\ a_4 = -a_5$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

unde $L_1 = a_2 + a_3 + 2a_6; L_2 = -a_1 - 2(a_4 + a_5); L_3 = -a_1 - (a_4 + a_5); L_4 = -(a_4 + a_5)$.

Exemplul 4.4. Fie sistemul diferenţial ternar, cu 6 parametri în ecuaţia critică, dintre care trei formează factorul comun al părţii pătratice, de forma

$$\begin{gathered}\dot{x} = (a_1x + b_1y + c_1z)(ax + by + cz),\ \ \dot{y} = x - y + (x - y + 2z)(ax + by + cz),\\ \dot{z} = x - z + (x + 2y - z)(ax + by + cz),\end{gathered} \tag{37}$$

unde a, b, c, a_1, b_1, c_1 sunt coeficienţi reali arbitrari.

Remarca 4.6. *Stabilitatea mişcării neperturbate guvernată de sistemul* (37) *include toate cazurile posibile în următoarele şase:*

I. $M_1M_2 \neq 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

II. $M_2 = 0,\ M_1M_3 < 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

III. $M_2 = 0,\ M_1M_3 > 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

IV. $M_1M_4 \neq 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

V. $M_4 = 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

VI. $M_1 = 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

unde $M_1 = a+b+c;\ M_2 = a_1+b_1+c_1;\ M_3 = -aa_1+(b+c)(b_1+c_1);\ M_4 = (b+c)(b_1+c_1)$.

Observaţie. *În cazul II al Remarcii 4.3, cazul V al Remarcii 4.5 şi cazul VI al Remarcii 4.6, mişcarea neperturbată aparţine unei serii continui de mişcări stabilizate (staţionare), la care aparţine şi mişcarea neperturbată examinată şi atunci toate mişcările acestei serii, destul de apropiate de cea neperturbată incluzând-o şi pe ultima, vor fi stabile. În acest caz, pentru perturbări destul de mici orice mişcare perturbată se va apropia asimptotic către una din mişcările stabilizate a seriei menţionate. Mai mult ca atât, mişcarea a II-a din Remarcile 4.5 şi 4.6 este şi asimptotic stabilă [6].*

CONCLUZII GENERALE ŞI RECOMANDĂRI

În lucrare, din punct de vedere a teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale, a fost studiată stabilitatea mişcării neperturbate, descrise de sisteme diferenţiale plane şi ternare cu membrii drepţi polinoame. Pentru prima dată în aceste cercetări au fost folosite teoria algebrelor Lie şi metoda invarianţilor algebrici a ecuaţiilor difernţiale, fondată la Chişinău de academicianul Constantin Sibirschi.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în abordarea prin intermediul algebrelor Lie şi algebrelor invarianţilor a unor sisteme diferenţiale, ceea ce a contribuit la obţinerea condiţiilor centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale bidimensionale şi ternare cu neliniarităţi polinomiale, în vederea aplicării lor ulterioare la modele matematice concrete. Rezultatele cercetărilor elaborate ne permit de a efectua următoarele concluzii şi recomandări:

Concluzii generale:

1. În teza de faţă, pentru prima dată s-a formulat şi s-a rezolvat problema determinării condiţiilor centroafin-invarinte de stabilitate a mişcării neperturbate în clasa sistemelor diferenţiale plane cu neliniarităţi de până la gradul patru, ceea ce reprezintă pentru viitor un pas important în studiul calitativ al acestor sisteme ([11, 12, 14, 16]);

2. Au fost obţinute condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării periodice neperturbate pentru sistemele diferenţiale ternare cu neliniarităţi pătratice de tip Darboux şi construite integralele generale şi algebrele Lie pentru toate sistemele de acest tip ce se aflǎ pe varietăţile invariante, descrise de o integrală particulară învariantă proprie acestui sistem ([9, 10, 15, 17, 20]);

3. A fost construită o formă canonică a sitemului ternar generalizat de tip Lyapunov-Darboux şi obţinute integralele polinomial exponenţiale pentru acest sistem. Au fost construite exemple de sisteme ternare generalizate de tip Lyapunov-Darboux în cazul critic şi obţinute condiţiile de stabilitate a mişcării neperturbate. Unele din sistemele studiate au ca proiecţii modele matematice din medicină ([8, 13, 18, 19, 21]).

Recomandări:

Rezultatele obţinute şi metodele elaborate pot fi folosite:

– la studierea stabilitaţii mişcarii neperturbate în cazul critic pentru sistemele diferenţiale plane cu neliniarităţi polinomiale complete până la gradul trei sau patru inclusiv;

– la studierea stabilităţii mişcării neperturbate pentru sistemele diferenţiale ternare de tip Darboux cu neliniarităţi de gradul trei şi patru;

– la investigarea diferitor modele matematice din medicină, biologie, mecanică ş.a.;

– în programele cursurilor opţionale a facultăţilor universitare cu profil real.

BIBLIOGRAFIE

1. Gerştega N. Lie algebras for the three-dimensional differential system and applications. PhD thesis, Chişinău, 2006, 133 p.

2. Diaconescu O. Lie algebras and invariant integrals for polynomial differential systems. PhD thesis, Chişinău, 2008, 126 p.

3. Lyapunov A.M. The general problem on stability of motion. Collection of works, II – Moscow-Leningrad: Izd. Acad. Nauk SSSR. 1956 (în rusă) (Liapunoff A.M., Probléme générale de la stabilitaté du mouvement. Annales de la Faculté des sciences de l'Université de Toulouse, Ser. 2, 9(1907), p. 203–470, Reproduction in Annals of Mathematics Studies 17, Princenton: University Press, 1947, reprinted, Kraus Reprint Corporation, New York, 1965).

4. Merkin D.R. Introduction to the theory of stability. NY: Springer–Verlag, 1996. 320 p.

5. Merkin D.R., et al. Theory of stability in examples and problems. Institute of computers studies, Moskva-Ijevsk, 2007. 208 p. (în rusă).

6. Malkin I.G. Theory of stability of motion. Moskva: Nauka, 1966. 530 p. (în rusă).

7. Popa M.N. Metode cu algebre la sisteme diferenţiale. Universitatea din Piteşti: Flower Power. Seria Matematică Aplicată şi Industrială 15, 2004. 340 p.

8. **Neagu N.**, Popa M.N. Canonical form of the ternary generalized differential Lyapunov-Darboux system with quadratic nonlinearities. In: ROMAI Journal, 2015, vol. 11, no. 2, p. 89–107.

9. **Neagu N.**, Cozma D., Popa M.N. Invariant methods for studying stability of unperturbed motion in ternary differential systems with polynomial nonlinearities. In: Bukovinian Mathematical Journal, 2016, vol. 4, no. 3-4, p. 133–139.

10. **Neagu N.** Invariant integrability conditions for ternary differential systems with quadratic nonlinearities of the Darboux form. In: Bull. Acad. Sci. of Moldova. Mathematics, 2016, vol. 82, no. 3, p. 57–71.

11. **Neagu N.**, Orlov V., Popa M.N. Invariant conditions of stability of unperturbed motion governed by some differential systems in the plane. In: Bull. Acad. Sci. of Moldova, Mathematics, 2017, vol. 85, no. 3, p. 88–106.

12. **Neagu N.**, Orlov V., Popa M.N. Invariant conditions of stability of unperturbed motion for differential system with quadratic nonlinearities in the critical case. The 4th Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova (dedicated to the centenary of Vladimir Andrunachievici (1917-1997)), June 28–July 2, 2017, Chişinău. Proceedings CMSM4, p. 301–304.

13. **Neagu N.**, Popa M.N., Orlov V. First integrals with polynomial not higher than second order of the mathematical model of the intrinsic transmission dynamics of tuberculosis. The third Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova (dedicated to the 50th anniversary of the foundation of the Institute of Mathematics and Computer Science), August 19-23, 2014, Chişinău. Proceedings IMCS-50, p. 257–260.

14. **Neagu N.** Condiţii invariante de stabilitate a mişcărilor neperturbate pentru sistemul diferenţial cu nelinearităţi cubice în cazul critic. Materialele Conferinţei Ştiinţifice a Doctoranzilor (cu participare internaţională) "Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători" ediţia VI-a, 15 iunie, 2017, Chişinău, p. 35–39.

15. **Neagu N.** Integrabilitatea sistemului diferenţial ternar pe o varietate invariantă. Materialele Conferinţei Ştiinţifice a Doctoranzilor "Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători" ediţia V-a, 25 mai, 2016, Chişinău, p. 314–319.

16. **Neagu N.**, Orlov V., Popa M.N. Stability of unperturbed motion for differential systems with nonlinearities of degree four. The 25th Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2017), September 14-17, 2017, Iaşi, România. Book of Abstracts, p. 39–40.

17. **Neagu N.**, Cozma D., Popa M.N. Centro-affine invariants and stability of unperturbed motion in ternary polinomial differential systems. Materials of International Scientific Conference "Differential-functional equations and their applications" (dedicated to the 80th anniversary from day of birth of Professor V.I. Fodchuk (1936-1992)), Seprember 28-30, 2016, Chernivtsi, Ukraine, p. 124–125.

18. **Neagu N.**, Popa M.N. Ternary generalized Lyapunov-Darboux system and some polynomial-exponential first integrals. The 23th Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2015), September 17-20, 2015, Suceava, România. Book of Abstracts. p. 27–28.

19. **Neagu N.**, Popa M.N. Ternary generalized Darboux system with quadratic nonlinearities. International Conference "Mathematics & information tehnologies: research and education (MITRE-2015)", Moldova State University, July 2-5, 2015, Chişinău. Abstracts, p. 61–62.

20. **Neagu N.**, Popa M.N. Lie algebras of ternary differential systems with quadratic nonlinearities of the Darboux form and applications. International Conference "Mathematics & information tehnologies: research and education (MITRE-2016)"

(dedicated to the 70th anniversary of the Moldova State University), June 23-26, 2016, Chişinău. Abstracts, p. 46–47.

21. **Neagu N.** Necessary conditions for the existence of the Iacobi ternary differential system. Materialele Conferinţei Ştiinţifice Internaţionale a Doctoranzilor "Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători" ediţia IV-a, 10 martie 2015, p. 23.
22. Sibirsky K.S. Introduction to the algebraic theory of invariants of differential equations. Nonlinear Science: Theory and Applications. Manchester: Manchester University Press, 1988. 169 p.
23. Calin Iu. On rational bases of $GL(2,\mathbb{R})$-comitants of planar polynomial systems of differential equations. In: Bull. Acad. Sci. of Moldova, Mathematics, 2003, vol. 42, no. 2, p. 69–86.
24. Ciubotaru S. Rational bases of $GL(2,\mathbb{R})$-comitants and $GL(2,\mathbb{R})$-invariants for the planar systems of differential equations with nonlinearities of the fourth degree. In: Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Moldova, Mat., 2015, vol. 79, no. 3, p. 14–34.
25. Gerştega N., Popa M.N. Mixed comitants and $GL(3,\mathbb{R})$–orbit's dimensions for the three-dimensional differential system. In: Buletin Ştiinţific Universitatea din Piteşti, Seria Matematică şi Informatică, 2003, no. 9, p. 149–154.
26. Hermit Ch. Sur le résultant de trois formes quadratique ternaires, extrait d'une lettre à M. Borchardt. In: Journal fur die reine und angewandte Mathematik, von A. L. Crelle, t. LVII, 1860, Berlin, p. 371–375.
27. Gurevich G. B. Foundations of the algebraic invariants. Moscow: GITTL, 1948. 429 p. (English transl., Nordhoff, 1964).
28. Alain Goriely. Integrability and nonintegrability of dynamical systems. Advanced Series in Nonlinear Dynamics, 19. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2001, XVIII. 415 p.
29. Avilov K.K., Romaniuha A.A. Mathematical models of tuberculosis extension and control of it. In: Mathematical Biology and Bioinformatics, 2007, vol. 2, no. 2, p. 188–318 (în rusă).
30. Puţuntică V. ş.a. Model matematic de control al tuberculozei în Republica Moldova. Raport ştiinţific final pe anii 2010–2011, Institutul de Matematică şi Informatică al AŞM, Chişinău, 2011.
31. Ren Jingli, Hou Yuankun. Traveling waves for two SIV models. In: Journal of Shanghai Normal University (Natural Sciences), 2015, vol. 44, no. 3, p. 304–313.
32. Blower S. M. and other. The intrinsinc transmission dynamics of tuberculosis epidemics. In: Nature Medicine, 1995, vol. 8, no. 1, p. 815–821.

ADNOTARE

la teza “Algebre Lie şi invarianţi la sisteme diferenţiale cu proiecţii pe unele modele matematice”, prezentată de către Neagu Natalia pentru obţinerea gradului de doctor în ştiinţe matematice la specialitatea 111.02 - ecuaţii diferenţiale.

Teza a fost elaborată la Universitatea de Stat din Tiraspol (Chişinău) în anul 2017. Lucrarea este scrisă în limba română şi cuprinde: introducere, 4 capitole, concluzii generale şi recomandări, bibliografie (73 titluri), 125 pagini de bază. La tema tezei sunt publicate 14 lucrări ştiinţifice.

Cuvinte–cheie: sistem diferenţial polinomial, sistem diferenţial ternar de tip Darboux (Lyapunov-Darboux), stabilitatea mişcării neperturbate, algebră Lie, invariant, comitant.

Domeniul de studiu al tezei: teoria calitativă a sistemelor dinamice, integrabilitatea sistemelor diferenţiale polinomiale, stabilitatea mişcării neperturbate.

Scopul şi obiectivele lucrării: determinarea condiţiilor centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale bidimensionale şi ternare cu neliniarităţi polinomiale; examinarea cazurilor necritice şi critice pentru sistemele menţionate; integrabilitatea sistemelor diferenţiale ternare de tip Darboux şi de tip Lyapunov-Darboux.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică constă în aceea, că pentru prima dată au fost utilizate metodele algebrelor Lie şi a teoriei invarianţilor şi comitanţilor algebrici în studiul stabilităţii mişcării neperturbate, descrise de sistemele diferenţiale bidimensionale şi ternare cu neliniarităţi polinomiale.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în abordarea prin intermediul algebrelor Lie şi algebrelor invarianţilor a unor sisteme diferenţiale, ceea ce a contribuit la obţinerea condiţiilor centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale bidimensionale şi ternare cu neliniarităţi polinomiale, în vederea aplicării lor ulterioare la modele matematice concrete.

Semnificaţia teoretică. Rezultatele obţinute în teză sunt noi şi reprezintă un început de dezvoltare a unei noi abordări asupra utilizării algebrelor Lie şi teoriei invarianţilor algebrici în studiul stabilităţii mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale bidimensionale şi ternare cu neliniarităţi polinomiale, integrabilităţii sistemelor ternare pe unele varietăţi invariante.

Implementarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele tezei pot fi folosite în dezvoltarea de mai departe a teoriei stabilităţii mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale multidimensionale cu neliniarităţi polinomiale cu ajutorul algebrelor Lie şi teoriei invarianţilor; pot fi utilizate în studiul modelelor matematice ce sunt date de ecuaţii diferenţiale care descriu diverse procese din fizică, medicină, biologie, chimie, economie ş.a.; pot servi drept suport pentru tezele de masterat şi la elaborarea cursurilor opţionale universitare şi post-universitare.

АННОТАЦИЯ

диссертации "Алгебры Ли и инварианты для дифференциальных систем с проекциями на некоторые математические модели", представленной Нягу Натальей на соискание ученой степени доктора математических наук по специальности 111.02 - дифференциальные уравнения. Диссертация выполнена в Тираспольском Государственном Университете (Кишинэу) в 2017 году на румынском языке и состоит из введения, четырех глав, общих выводов и рекомендаций, библиографии (73 работа), 125 страниц основного текста. Основные полученные результаты опубликованы в 14 научных работах.

Ключевые слова: полиномиальная дифференциальная система, трехмерная дифференциальная система вида Дарбу (Ляпунова-Дарбу), устойчивость невозмущенного движения, алгебра Ли, инвариант, комитант.

Область исследования: качественная теория динамических систем, интегрируемость полиномиальных дифференциальных систем, устойчивость невозмущенного движении.

Цель и задачи диссертации: нахождение центроаффинно-инвариантных условии устойчивости невозмущенного движения описанные двумерными и трехмерными дифференциальными системами с полиномиальными частями; исследование критических и некритических случаев для данных систем; интегрируемость трехмерных дифференциальных систем вида Дарбу и вида Ляпунова-Дарбу.

Новизна и научная оригинальность. Впервые были использованы методы алгебр Ли, теории алгебраических инвариантов и комитантов при исследовании устойчивости невозмущенного движения описанного двумерными и трехмерными дифференциальными системами с полиномиальными частями.

Главная решенная научная задача состоит в изучении посредством алгебр Ли и алгебр инвариантов некоторых дифференциальных систем, что способствует нахождению центроаффинно-инвариантных условий устойчивости невозмущенного движения, описанного двумерными и трехмерными дифференциальными системами с полиномиальными частями, что позволит их дальнейшее применение к конкретным математическим моделям.

Теоретическое и практическое значение работы. В диссертации получены новые результаты, которые являются началом нового подхода в использовании алгебр Ли и теории алгебраических инвариантов и комитантов при исследовании устойчивости невозмущенного движения описанного двумерными и трехмерными дифференциальными системами с полиномиальными частями, интегрируемости трехмерных дифференциальных систем на некоторых инвариантных многообразиях.

Реализация научных результатов. Полученные результаты могут быть использованы при дальнейшем развитии теории устойчивости невозмущенного движения с помощью алгебр Ли и теории инвариантов, описанного многомерными дифференциальными системами с полиномиальными частями; при исследовании некоторых математических моделей, описывающих процессы в физике, медицине, биологии, химии, экономике и т.д; могут служить материалом для разработки тем магистерских работ и спецкурсов для студентов.

ANNOTATION

of the thesis "Lie algebras and invariants for differential systems with projections on some mathematical models", presented by Neagu Natalia for obtaining the Doctor degree in Mathematics, specialty 111.02 - differential equations. The thesis was elaborated at Tiraspol State University (Chişinău) and presented for defense in 2017. The language of the thesis is Romanian. It comprises 125 pages and has the following structure: Introduction, 4 Chapters, General Conclusions and Recommendations, Bibliography with 73 References. Research outcomes were reflected in 14 scientific works.

Keywords: polynomial differential system, ternary differential system of Darboux (Lyapunov-Darboux) type, stability of unperturbed motion, Lie algebra, invariant, comitant.

Field of study of the thesis: qualitative theory of dynamical systems, integrability of polynomial differential systems, stability of unperturbed motion.

The purpose and objectives of the thesis are: to determinate the centro-affine invariant conditions of stability of unperturbed motion described by two-dimensional and ternary differential systems with polynomial nonlinearities; to investigate the critical and noncritical cases for such systems; to study the integrability of ternary differential systems of Darboux type and of Lyapunov-Darboux type.

Novelty and scientific originality. For the first time there were used the methods of Lie algebras and of theory of algebraic invariants and comitants in study of stability of unperturbed motion described by two-dimensional and ternary differential systems with polynomial nonlinearities.

The main scientific problem solved consists in approaching of some differential systems by Lie algebras and algebras of invariants, which contributed to obtain the centro-affine invariant conditions of stability of unperturbed motion described by two-dimensional and ternary differential systems with polynomial nonlinearities. This made possible to apply the obtained results in future investigation of concrete mathematical models.

The significance of theoretical and practical values of the work. The results obtained in thesis are new and represent a new approach on the use of Lie algebras and theory of algebraic invariants and comitants in study of stability of unperturbed motion described by two-dimensional and ternary differential systems with polynomial nonlinearities, the integrability of ternary differential systems on some invariant varieties.

Implementation of the scientific results. The obtained results can: be used in further investigation of the theory of stability of unperturbed motion described by multidimensional differential systems with polynomial nonlinearities using Lie algebras and the theory of invariants; be used in the study of some mathematical models describing processes from physics, medicine, biology, chemistry, economy, etc; serve as support for Master thesis and for teaching courses at the university level.

NEAGU NATALIA

ALGEBRE LIE ŞI INVARIANŢI LA SISTEME DIFERENŢIALE CU PROIECŢII PE UNELE MODELE MATEMATICE

111.02 – ECUAŢII DIFERENŢIALE

Autoreferatul tezei de doctor în ştiinţe matematice

Aprobat spre tipar: 19.05.2018 Formatul hârtiei 60x84 1/16
Hârtie ofset. Tipar ofset. Tiraj 60 ex.
Coli de tipar: 1,7 Comanda nr. 327

Tipografia UST, str. Gh. Iablocikin, nr.5, MD 2069